

Análisis Matemático I

1. (1 punto) Sea (E, d) un espacio métrico. Prueba la desigualdad:

$$|d(x, y) - d(z, u)| \leq d(x, z) + d(y, u) \quad (x, y, z, u \in E)$$

Deduce que si $\{x_n\} \rightarrow x$ e $\{y_n\} \rightarrow y$ entonces $\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow d(x, y)$.

2. (2 puntos) Definamos $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Prueba que ρ es una distancia en \mathbb{R} equivalente a la usual y que el espacio métrico (\mathbb{R}, ρ) no es completo.

3. (2 puntos) Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto no vacío. Prueba que hay elementos $a \in K, b \in K$ tales que $\text{diam}(K) = d(a, b)$.
4. (2 puntos) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\|$. Prueba que la imagen de \mathbf{F} es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^n .
5. (3 puntos) Demuestra el teorema de Hausdorff: *Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes*. Indica algunas de sus consecuencias.